Exercices avec MAPLE

Oral Centrale 2006

$\boxed{1}$ Etude de $f : x \mapsto \int_x^{2x} \frac{t^2}{t^2+\sin^2 t}dt$, définition, dérivabilité, asymptote, développement asymptotique quand $x \mapsto +\infty$ à la précision de $1/x^2$, courbe.

$\boxed{2}$ En utilisant le produit scalaire sur $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$: $\langle f|g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$, calculer:
$\min\left\{ \int_0^1 \Big(t\ln(t) - a - bt - ct^2)^2 dt, \ , a,b,c \in\mathbb{R}\right\}$

$\boxed{3}$ Soit a,b,c trois réels strictement positifs vérifiant: $abc = 1$, on cherche à savoir s'il est possible d'avoir à la fois: $a > b > 1 > c$ et $a + b + c > \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$
On pose $f : (x,y) \mapsto x + y + \frac{1}{xy} - \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + xy\right)$
Représenter la surface d'équation $z = f(x,y)$ sur le domaine approprié à la résolution du problème. Conclure.

Oral ENSAM 2006

$\boxed{4}$ A quelle condition sur a,b,c la matrice: $\begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & a & 1 & b & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & b & 1 & a & 0 \\ b & 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix}$ est-elle diagonalisable ? La diagonaliser dans ce cas.

$\boxed{5}$ On note $S_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{\ln k}{k^2}$, montrer que les deux suites $(S_{2n})_n$, $(S_{2n+1})_n$ $n \in\mathbb{N}^*$, sont adjacentes. Calculer $\lim_n S_n$ à 10^{-3} près.

$\boxed{6}$ Trouver suivant $a,b,c \in\mathbb{R}$, la dimension de l'espace des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui commutent avec
$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & a & b \\ c & c & a \end{bmatrix}$

$\boxed{7}$ Déterminer a,b,c,d,e,f pour que $A = \begin{bmatrix} a & 1 & b \\ 1 & c & d \\ e & f & 1 \end{bmatrix}$ admette $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ pour vecteurs propres.