Exercice 42

Enoncé

a) Montrer pour tout réel x l'existence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \arctan(tx)\exp(-t)dt$

b) On définit la suite récurrente $x_0 = 1$ et $x_{n+1} = \displaystyle\int_0^{+\infty} \arctan(tx_n)\exp(-t)dt$, donner une valeur approchée des cinquantes premiers termes.

c) Représenter $x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \arctan(xt)\exp(-t)dt$ pour x variant de -10 à 10

Commentaires

a) La majoration $|\arctan(xt)\exp(-t)| \leq \pi/2 \times \exp(-t)$ montre la convergence de l'intégrale;

b) Par une boucle, on calcule les premiers termes de la suite $(x_n)_n$, à noter la commande evalf(Int) et non evalf(int). dans le premier cas, le logiciel calcule l'intégrale par une méthode approchée (de type Simpson), dans le second cas il cherche à obtenir une valeur exacte de l'intégrale puis il en prend une valeur approchée. J'ai fait affiché, par une autre boucle, les valeurs de x_n pour n variant de 40 à 50

c) La commande plot convient pour cette version de MAPLE, pour une plus ancienne le calcul est trop lourd, il faut alors calculer une liste de points $[k/N, f((k/N)]$

Commandes MAPLE

Voir page suivante

>

Exercice 42

> restart:

> x[0]:=1:

> for k from 1 to 50 do x[k]:=evalf(Int(arctan(t*x[k-1])*exp(-t),t=0..+infinity)) od:

> for l from 41 to 50 do x[l]:=x[l] od;

$$x_{41} := 0.08445625244$$

$$x_{42} := 0.08333816307$$

$$x_{43} := 0.08226201309$$

$$x_{44} := 0.08122528555$$

$$x_{45} := 0.08022566792$$

$$x_{46} := 0.07926103136$$

$$x_{47} := 0.07832941251$$

$$x_{48} := 0.07742899743$$

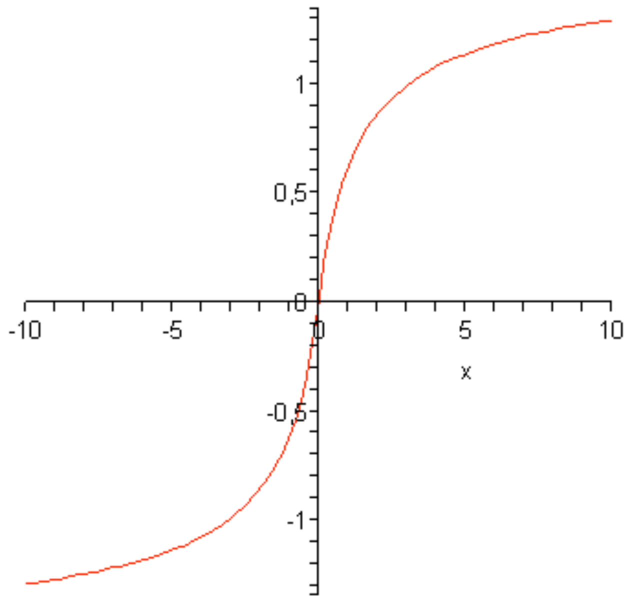
$$x_{49} := 0.07655810738$$

$$x_{50} := 0.07571518622$$

> f:=x->evalf(Int(arctan(t*x)*exp(-t),t=0..+infinity));

$$f := x \rightarrow evalf\left(\int_0^{\infty} \arctan(t\, x)\, \mathrm{e}^{(-t)}\, dt\right)$$

> plot(f(x),x=-10..10);


1
0,5
0
-0,5
-1
-10
-5
5
10
x

>