TD Informatique 3

Exercice 1

On considère la suite de polynômes de Bernoulli, définie par

$B_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $\quad B'_n = nB_{n-1}$ et $\displaystyle\int_0^1 B_n(t)dt = 0$

a) Calculer les coefficients des polynômes B_n pour n variant de 0 à 5

b) Représenter les fonctions $x \mapsto B_n(x)$ avec $x \in [0,\, 1]$ et n variant de 0 à 5

Exercice 2

Soit f une fonction impaire, $2\pi-$périodique, vérifiant $\forall x \in [0,\, \pi[\quad f(x) = x$ Calculer les coefficients de Fourier de f Pourquoi MAPLE ne simplifie pas l'expression de $b_n(f)$?

Exercice 3

Soit f une fonction impaire, 2π-périodique, vérifiant: $\forall x \in [0,\, \pi[\quad f(x) = x^3$

a) Calculer la n-ième somme de Fourier de f notée $S_n(f)$

b) Représenter, sur$[0,\, 2\pi]$, la courbe de f en bleue, les courbes de $S_n(f)$ en rouge,
pour n variant de 1 à 5

Exercice 4

On définit sur $\mathbb{R}_n[X]$ le produit scalaire: $\langle P|Q\rangle = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P(k)Q(k)$ On note $(P_j)_j$ la suite orthogonale définie par: $P_0 = 1$ et pour j variant de 1 à n: $\quad P_j = X^j - \displaystyle\sum_{k=0}^{j-1} c_k P_k$ avec $c_k = \dfrac{\langle X^j|P_k\rangle}{\langle P_k|P_k\rangle}$

Pour $n = 4$ calculer les polynômes P_k

Exercice 5

Calculer, pour $n = 5$, $\quad \inf\left\{ \displaystyle\int_0^1 \left(t^n - \sum_{k=0}^{n-1} c_k t^k\right)^2 dt,\ c_0, c_1, .., c_{n-1} \in \mathbb{R}\right\}$

Exercice 6

a) Ecrire la matrice de la rotation r d'axe $\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$ d'angle θ

b) On considère le cube de centre 0 de sommets $(\pm 1)\overrightarrow{i} + (\pm 1)\overrightarrow{j} + (\pm 1)\overrightarrow{k}$ On note $\mathcal{C}$' l'image de ce cube par la rotation r Pour différente valeurs de θ représenter la projection orthogonale des arêtes de $\mathcal{C}$' sur le plan xOy

c) On se place en dimension 4, on note $\mathcal{B}$=$(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}, \overrightarrow{l})$ une base orthonormale. On considère l'hypercube de sommets $(\pm 1)\overrightarrow{i} + (\pm 1)\overrightarrow{j} + (\pm 1)\overrightarrow{k} + (\pm 1)\overrightarrow{l}$ On condidère la rotation r de matrice:

$$\begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\beta) & -\sin(\beta) \\ 0 & 0 & \sin(\beta) & \cos(\beta) \end{bmatrix}$$ dans la base:

$\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}(\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j});\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}(\overrightarrow{k} - \overrightarrow{l}),\ \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} - \overrightarrow{k} - \overrightarrow{l}),\ \dfrac{1}{2}((\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k} + \overrightarrow{l})\right)$

On note $\mathcal{C}$' l'image de l'hypercube par la rotation r Pour des valeurs de α, β représenter la projection orthogonale de $\mathcal{C}$' sur le plan xOy

FIN