Exercice 77

Enoncé

Représenter la boule unité de $\mathbb{R}^2$ pour la norme $(x,y) \mapsto N(x,y) = \int_0^1 |x+ty|\,dt$

Commentaires

Première solution, pour une direction donnée $x = \lambda\cos(\theta)$ et $y = \lambda\sin(\theta)$ on norme le vecteur d'où le point de la boule $\left[\frac{\cos(\theta)}{N(\cos(\theta),\sin(\theta))}, \frac{\sin\theta)}{N(\cos(\theta),\sin(\theta))}\right]$, on construit ainsi des points de la boule.

Seconde méthode, par le calcul de $N(x,y)$ La boule est symétrique par rapport à l'origine, on peut supposer $x \geq 0$

Si $y \geq 0$ alors $N(x,y) = x + \frac{y}{2} = 1$ donc $y = 2 - 2x$

Si $y < 0$ alors $x + ty \geq 0 \Leftrightarrow t \leq -\frac{x}{y}$

Si $\frac{x}{-y} \geq 1$ c'est-à-dire $x \geq -y$ on retrouve $y = 2 - 2x$

Sinon $\int_0^{-x/y} (x+ty)dt + \int_{-x/y}^1 (-x-ty)dt = 1$ donc

$-\frac{x^2}{y} + \frac{x^2}{2y} - x - \frac{x^2}{y} - \frac{y}{2} + \frac{x^2}{2y} = 1$ donc $-\frac{x^2}{y} - x - \frac{y}{2} = 1$ et $x^2 + xy + \frac{y^2}{2} + y = 0$

La demi-boule est réunion d'un segment de droite $y = 2 - 2x$ et d'un arc de la conique d'équation $x^2 + xy + \frac{y^2}{2} + y = 0$

La difficulté est de bien définir les bornes

Commandes MAPLE

Voir pages suivantes

>

Exercice 77

> restart: NIN:=u->int(abs(cos(u)+t*sin(u)),t=0..1);

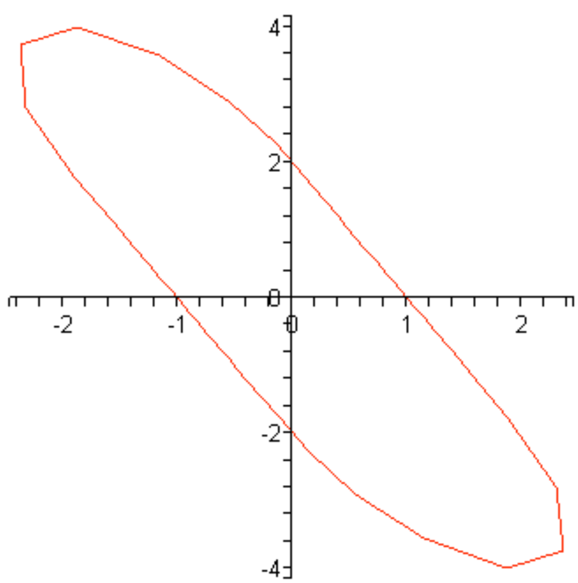
$$NIN := u \rightarrow \int_0^1 |\cos(u) + t\sin(u)| \, dt$$

> N:=50;

$$N := 50$$

> L:=[seq([evalf(cos(2*k*Pi/N)/NIN(2*k*Pi/N)),evalf(sin(2*k*Pi/N)/NIN(2*k*Pi/N))], k=0..N)]:

> plot(L);



> restart:with(plots):

Warning, the name changecoords has been redefined

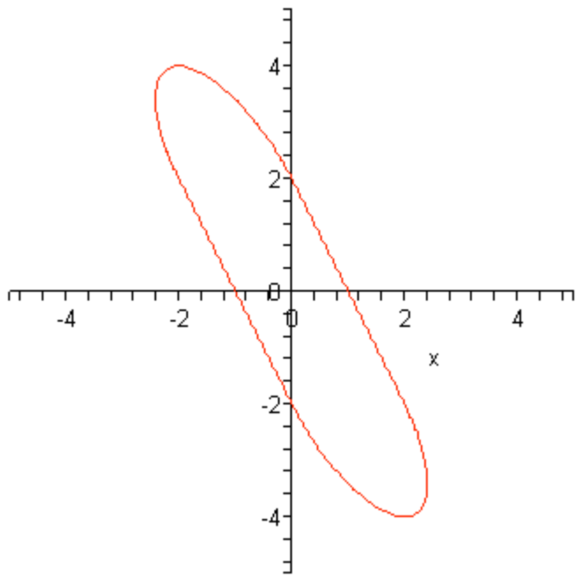
> C1:=plot(2-2*x, x=0..2, view=[-5..5,-5..5]):

> C2:=plot(-2-2*x, x=-2..0, view=[-5..5,-5..5]):

> C3:=implicitplot(x^2+x*y+y^2/2+y=0, x=0..4, y=-4..-2):

> C4:=implicitplot(x^2+x*y+y^2/2-y=0, x=-4..0, y=2..4):

> display([C1,C2,C3,C4]);



>