Exercice 54

Enoncé

Soit $f : x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$, montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$ l'équation $f"(x) = 0$ admet une unique solution x_k Vérifier que les tangentes à la courbe représentative de f en x_k sont aussi tangentes à l'ellipse $\dfrac{1}{4}x^2 + y^2 = 1$

Commentaires

J'ai modifié la question et j'ai préféré tracer en bleu la courbe $y = f(x)$ pour x variant de 1 à 15, en rouge l'ellipse d'équation $\dfrac{1}{4}x^2 + y^2 = 1$ paramétrée en $x = 2\cos t$, $y = \sin t$, et aux points de la courbe $y = f(x)$ d'abscisse x_k les tangentes à la courbe en vert. On vérifie que ces droites sont aussi tangentes à l'ellipse.
Le calcul est approché car on ne peut avoir une valeur exacte de x_k
J'ai multiplié par x^3 l'expression de $f"(x)$ pour ne pas avoir de dénominateur. A remarquer la commande fsolve dur un segment.

Commandes MAPLE

Voir page suivante

>

Exercice 54

```
> restart: with(plots):
```

Warning, the name changecoords has been redefined

```
> f:=x->sin(x)/x;
```

$$f := x \to \frac{\sin(x)}{x}$$

```
> g:=simplify(diff(f(x),x,x));
```

$$g := -\frac{\sin(x)\,x^2 + 2\cos(x)\,x - 2\sin(x)}{x^3}$$

```
> eq:=x^3*g;
```

$$eq := -\sin(x)\,x^2 - 2\cos(x)\,x + 2\sin(x)$$

```
> for k from 0 to 3 do x[k]:=fsolve(eq=0, x, x=Pi/2+k*Pi..(k+1)*Pi)
  od;
```

$$x_0 := 2.081575978$$

$$x_1 := 5.940369991$$

$$x_2 := 9.205840143$$

$$x_3 := 12.40444502$$

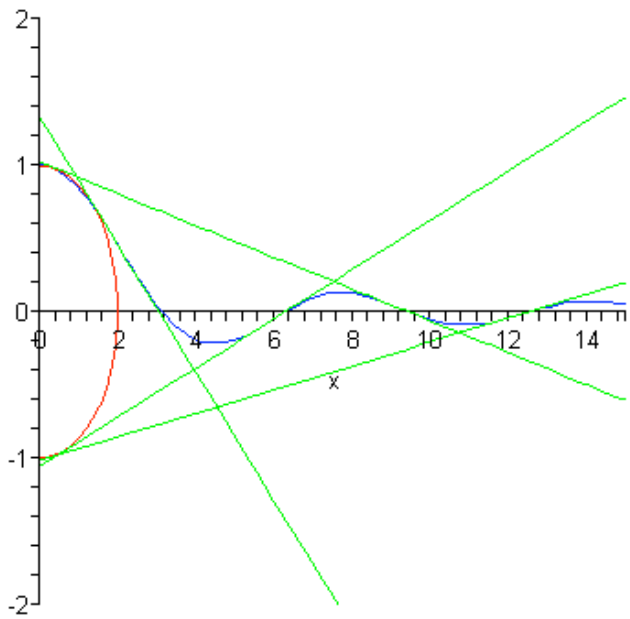
```
> C1:=plot(f(x),x=0..15, color=blue):
```

```
> C2:=plot([2*cos(t), sin(t), t=0..2*Pi]):
```

```
> T:=l-> plot(D(f)(x[l])*(x-x[l])+f(x[l]), x=0..15, y=-2..2,
```

color=green):

> display([C1,C2,T(0),T(1),T(2),T(3)]);



>