

Exercice 221

Enoncé

Soit $f : x \mapsto \sqrt{x + \sqrt{1 - x^2}}$

- a) Ecrire le développement limité de $f(x)$ en 0 à l'ordre 10
- b) On suppose que f est solution de l'équation différentielle $(ax^2 + b)f''(x) + cx f'(x) + (dx^2 + e)f(x) = 0$ Trouver a, b, c, d, e
- c) Montrer que f est bien solution de cette équation sur $] -1, 1[$

Commentaire

Comme pour une série entière, on trouve les coefficients par identification en dérivant formellement le DL (à remarquer la commande `convert(,polynom)`)

On peut retrouver ce résultat par le calcul.

Pour $x \in]0, 1[$ $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1 + \sqrt{1 - x^2}}} \times \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2}} = \frac{-1}{2} \frac{\sqrt{1 - \sqrt{1 - x^2}}}{\sqrt{1 - x^2}}$ en multipliant par la partie conjuguée.

$$f''(x) = -\frac{1}{2} \frac{1}{2\sqrt{1 - \sqrt{1 - x^2}}} \times \frac{x}{1 - x^2} - \frac{1}{2} \sqrt{1 - \sqrt{1 - x^2}} \times \frac{-1}{2} (1 - 2x^2)^{-3/2} (-2x)$$

$$f''(x) = -\frac{\sqrt{1 + \sqrt{1 - x^2}}}{4} \times \frac{1}{1 - x^2} - \frac{1}{4} \sqrt{1 - \sqrt{1 - x^2}} \times \frac{2x}{(1 - x^2)\sqrt{1 - x^2}} \text{ en multipliant par la partie conjuguée.}$$

$$4(1 - x^2)f''(x) = -f(x) + 4x f'(x)$$

$$\text{Donc } \underline{\underline{4(1 - x^2)f''(x) - 4x f'(x) + f(x) = 0}}$$

Commandes MAPLE

Voir page suivante

>

Exercice 221

> restart;

> f:=sqrt(1+sqrt(1-x^2));

$$f := \sqrt{1 + \sqrt{1 - x^2}}$$

> P:=convert(series(f,x,11), polynomial);

$$P := \sqrt{2} - \frac{1}{8}\sqrt{2}x^2 - \frac{5}{128}\sqrt{2}x^4 - \frac{21}{1024}\sqrt{2}x^6 - \frac{429}{32768}\sqrt{2}x^8 - \frac{2431}{262144}\sqrt{2}x^{10}$$

> Q:=expand((a*x^2+b)*diff(P,x,x)+c*x*diff(P,x)+(d*x^2+e)*P);

$$Q := -\frac{109395}{131072}b\sqrt{2}x^8 - \frac{1}{8}dx^4\sqrt{2} - \frac{429}{32768}dx^{10}\sqrt{2} - \frac{429}{32768}e\sqrt{2}x^8 - \frac{63}{512}cx^6\sqrt{2} - \frac{1}{4}ax^2\sqrt{2} - \frac{5}{32}cx^4\sqrt{2} - \frac{1}{4}b\sqrt{2} + e\sqrt{2} - \frac{429}{4096}cx^8\sqrt{2} - \frac{15}{32}b\sqrt{2}x^2 - \frac{21}{1024}e\sqrt{2}x^6 - \frac{1}{4}cx^2\sqrt{2} - \frac{2431}{262144}e\sqrt{2}x^{10} - \frac{3003}{4096}b\sqrt{2}x^6 - \frac{5}{128}e\sqrt{2}x^4 - \frac{15}{32}ax^4\sqrt{2} - \frac{315}{512}ax^6\sqrt{2} - \frac{2431}{262144}dx^{12}\sqrt{2} - \frac{1}{8}e\sqrt{2}x^2 - \frac{315}{512}b\sqrt{2}x^4 - \frac{21}{1024}dx^8\sqrt{2} - \frac{12155}{131072}cx^{10}\sqrt{2} + dx^2\sqrt{2} - \frac{3003}{4096}ax^8\sqrt{2} - \frac{5}{128}dx^6\sqrt{2} - \frac{109395}{131072}ax^{10}\sqrt{2}$$

> eq:=k->coeff(Q,x,2*k);

$$eq := k \rightarrow \text{coeff}(Q, x, 2k)$$

> S:=seq(eq(k)=0,k=0..4);

$$S := -\frac{1}{4}b\sqrt{2} + e\sqrt{2} = 0, -\frac{1}{4}a\sqrt{2} - \frac{15}{32}b\sqrt{2} - \frac{1}{4}c\sqrt{2} - \frac{1}{8}e\sqrt{2} + d\sqrt{2} = 0, -\frac{1}{8}d\sqrt{2} - \frac{5}{32}c\sqrt{2} - \frac{5}{128}e\sqrt{2} - \frac{15}{32}a\sqrt{2} - \frac{315}{512}b\sqrt{2} = 0, -\frac{63}{512}c\sqrt{2} - \frac{21}{1024}e\sqrt{2} - \frac{3003}{4096}b\sqrt{2} - \frac{315}{512}a\sqrt{2} - \frac{5}{128}d\sqrt{2} = 0, -\frac{109395}{131072}b\sqrt{2} - \frac{429}{32768}e\sqrt{2} - \frac{429}{4096}c\sqrt{2} - \frac{21}{1024}d\sqrt{2} - \frac{3003}{4096}a\sqrt{2} = 0$$

> res:=solve({S},{a,b,c,d});

$$res := \{b = 4e, d = 0, c = -4e, a = -4e\}$$

> g:=simplify(expand((-4*x^2+4)*diff(f,x,x)-4*x*diff(f,x)+f));

$$g := 0$$

>