

Exercice 200

Enoncé

Montrer la convergence de la série de terme $\frac{(-1)^n \ln(n)}{n}$

On note pour $N \in \mathbb{N}^*$ $S_N = \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^n \ln n}{n}$, montrer que les deux suites $(S_{2N})_N$ et $(S_{2N+1})_N$ pour $N \geq 2$ sont adjacentes.

Donner une valeur approchée de $\lim_N S_n$ à 10^{-3} près.

Commentaires

La fonction $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$ est décroissante pour $x \geq \exp(1)$ il suffit alors d'utiliser le théorème spécial sur les séries alternées.

Posons $S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \ln(n)}{n}$ alors

Pour $n \geq 2$ $0 \leq S - S_{2n+1} \leq S_{2n+2} - S_{2n+1} = \frac{\ln(2n+2)}{2n+2}$

Si on veut une valeur approchée de S à 10^{-3} près, il faut chercher n tel que $\frac{\ln(2n+2)}{2n+2} < 10^{-3}$

n est supérieur à 3000, on cherche une bonne valeur de n

On donne l'encadrement $S_{10001} < S < S_{10000}$

Commandes MAPLE

Voir page suivante

>

Exercice 200

> **restart:**

> **f:=x->ln(2*x+2)/(2*x+2);**

$$f := x \rightarrow \frac{\ln(2x+2)}{2x+2}$$

> **evalf(f(3000));**

0.001449491507

> **evalf(f(4000));**

0.001123150061

> **evalf(f(5000));**

0.0009208698612

> **s:=0: for k from 1 to 10000 do s:=evalf(s+(-1)^k*ln(k)/k) od:**

> **(evalf[5](s-ln(1001)/10001), evalf[5](s));**

0.15964, 0.16033

>