> # **Exercice 9** uns suite de fonction: intégrale de (x+t)^3 entre t=-1/(2n) et 1/(2n)#restart:

```
> A:=n->int((x+t)^3, t=-1/(2*n)..1/(2*n));
```

$$A := n \rightarrow \int_{-\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{2n}} (x+t)^3 \, dt$$

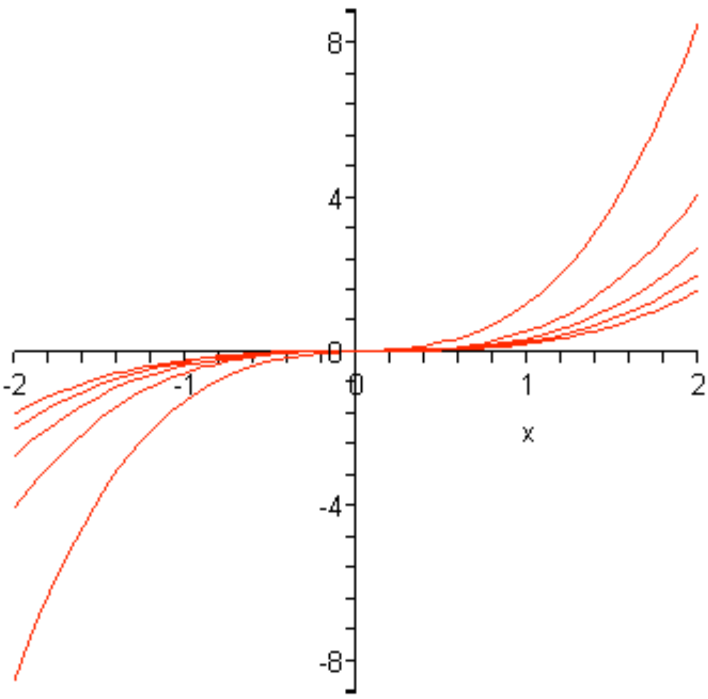
```
> with(plots):
```

Warning, the name changecoords has been redefined

```
> C:=k->plot(A(k), x=-2..2);
```

$$C := k \rightarrow plot(A(k), x = -2 .. 2)$$

```
> display([seq(C(j),j=1..5)]);
```



> # **Exercice 10** Calcul de coefficients de Fourier #

```
> restart:
```

> J:=(n,p)->2/Pi*int(cos(x)^p*cos(n*x), x=0..Pi);

$$J := (n,p) \to \frac{2\int_0^{\pi} \cos(x)^p \cos(n\,x)\,dx}{\pi}$$

> # calcul de ces intégrales pour n=3 et p variant de 0 à 24 #

> for k from 1 to 24 do J(3,k) od;

$$0$$

$$0$$

$$\frac{1}{4}$$

$$0$$

$$\frac{5}{16}$$

$$0$$

$$\frac{21}{64}$$

$$0$$

$$\frac{21}{64}$$

$$0$$

$$\frac{165}{512}$$

$$0$$

$$\frac{1287}{4096}$$

$$0$$

$$\frac{5005}{16384}$$

$$0$$

$$\frac{2431}{8192}$$

$$0$$

$$\frac{37791}{131072}$$

$$0$$

$$\frac{146965}{524288}$$

$$0$$

$$\frac{572033}{2097152}$$

$$0$$

>

> # #**Exercice 11** calcul d'une intégrale, d'une somme#

> **#Décomposition en éléments simple de 1/(1-x^6)#**

> **restart:**

> **f:=1/(1-t^6);**

$$f := \frac{1}{1-t^6}$$

> **g:=convert(f,parfrac,t);**

$$g := \frac{1}{6(t+1)} + \frac{t+2}{6(t^2+t+1)} + \frac{-t+2}{6(t^2-t+1)} - \frac{1}{6(t-1)}$$

> **#calcul d'intégrale#**

> **eval(int(f,t=0..a));**

$$\int_0^a \frac{1}{1-t^6}\,dt$$

> **h:=unapply(int(f,t),t);**

$$h := t \to \frac{1}{12}\ln(t^2+t+1) + \frac{1}{6}\sqrt{3}\arctan\left(\frac{1}{3}(2t+1)\sqrt{3}\right) - \frac{1}{6}\ln(t-1) + \frac{1}{6}\ln(t+1) - \frac{1}{12}\ln(t^2-t+1) + \frac{1}{6}\sqrt{3}\arctan\left(\frac{1}{3}(2t-1)\sqrt{3}\right)$$

> **h(x)-h(0);**

$$\frac{1}{12}\ln(x^2+x+1) + \frac{1}{6}\sqrt{3}\arctan\left(\frac{1}{3}(2x+1)\sqrt{3}\right) - \frac{1}{6}\ln(x-1) + \frac{1}{6}\ln(x+1) - \frac{1}{12}\ln(x^2-x+1) + \frac{1}{6}\sqrt{3}\arctan\left(\frac{1}{3}(2x-1)\sqrt{3}\right) + \frac{1}{6}I\pi$$

> **# Refus par MAPLE de calculer l'intégrale avec une borne variable x Le calcul de primitive n'est pas très satisfaisant à cause du ln(x-1) qui donne un imaginaire en 0#**

> # calcul d'une somme# sum(1/((6*n+1)*(6*n+6)), n=1..+infinity);

$$-\frac{1}{6}+\frac{1}{15}\ln(2)+\frac{1}{20}\ln(3)+\frac{1}{60}\sqrt{3}\,\pi$$

> #Exercice 12 Une courbe intégrale#

> restart:

> eq1:=diff(x(t),t)=sin(x(t)+y(t)); eq2:=diff(y(t),t)=cos(x(t)+y(t));

$$eq1 := \frac{d}{dt}x(t) = \sin(x(t)+y(t))$$

$$eq2 := \frac{d}{dt}y(t) = \cos(x(t)+y(t))$$

> r:=dsolve({eq1,eq2,x(0)=0,y(0)=Pi/4},{x(t),y(t)}, numeric);

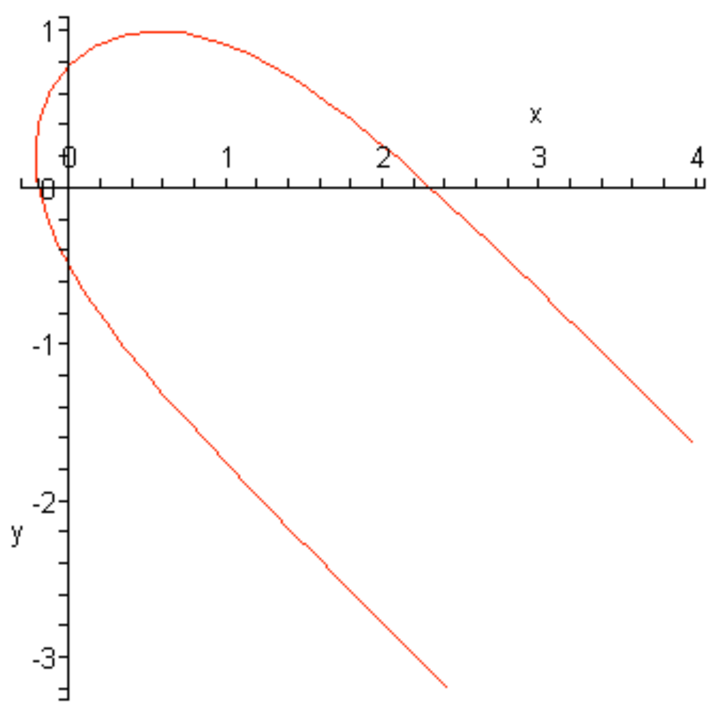
r := **proc**(x_rkf45) ... **end proc**;

> r(1);

$[t = 1., x(t) = 0.936153740173106374, y(t) = 0.943061025015610954]$

> with(plots):odeplot(r,[x(t),y(t)], -5..5);

Warning, the name changecoords has been redefined



> # Comportement en + ou - infini On remarque que y+x est solution de l'équation différentielle u'=sin(u)+cos(u)#

> s:=rhs(dsolve({diff(u(t),t)=sin(u(t))+cos(u(t)), u(0)=Pi/4},{u(t)}));

$$s := 2\arctan\left(\frac{1}{2}\left(\sqrt{2}+2\tanh\left(\frac{1}{2}\left(t-\sqrt{2}\,\operatorname{arctanh}\left(-4\sqrt{2}\sin\left(\frac{1}{8}\pi\right)^{3}\cos\left(\frac{1}{8}\pi\right)+\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)\right)\sqrt{2}\right)\right)\sqrt{2}\right)$$

> limit(s,t=+infinity);

$$\frac{3}{4}\pi$$

> limit(s,t=-infinity);

$$-\frac{1}{4}\pi$$

> # le calcul donne une expression plus simple de u(t), comme souvent MAPLE ne simplifie pas#

> **#Exercice 13** Suite définie par la valeur de l'intégrale de t^nexp(-t)/n!=1/2#

> restart: J:=n->int(t^n*exp(-t)/(n!),t=0..x);

$$J := n \to \int_0^x \frac{t^n e^{(-t)}}{n!}\,dt$$

> for k from 0 to 4 do eq[k]:=J(k)-1/2 od;

$$eq_0 := -e^{(-x)}+\frac{1}{2}$$

$$eq_1 := -e^{(-x)}-e^{(-x)}x+\frac{1}{2}$$

$$eq_2 := -e^{(-x)}-e^{(-x)}x-\frac{1}{2}e^{(-x)}x^2+\frac{1}{2}$$

$$eq_3 := -e^{(-x)}-e^{(-x)}x-\frac{1}{2}e^{(-x)}x^2-\frac{1}{6}e^{(-x)}x^3+\frac{1}{2}$$

$$eq_4 := -e^{(-x)}-e^{(-x)}x-\frac{1}{2}e^{(-x)}x^2-\frac{1}{6}e^{(-x)}x^3-\frac{1}{24}e^{(-x)}x^4+\frac{1}{2}$$

> for l from 0 to 4 do fsolve(eq[l],x,0..+infinity) od;

$$0.6931471806$$

$$1.678346990$$

$$2.674060314$$

$$3.672060749$$

$$4.670908883$$

> **#exercice 14** Calcul d'extremum #

> f:=y*exp(x)+x*exp(y);

$$f := y\,e^x + x\,e^y$$

> eq1:=diff(f,x);

$$eq1 := y\,e^x + e^y$$

> eq2:=diff(f,y);

$$eq2 := e^x + x\,e^y$$

> solve({eq1=0,eq2=0},{x,y});

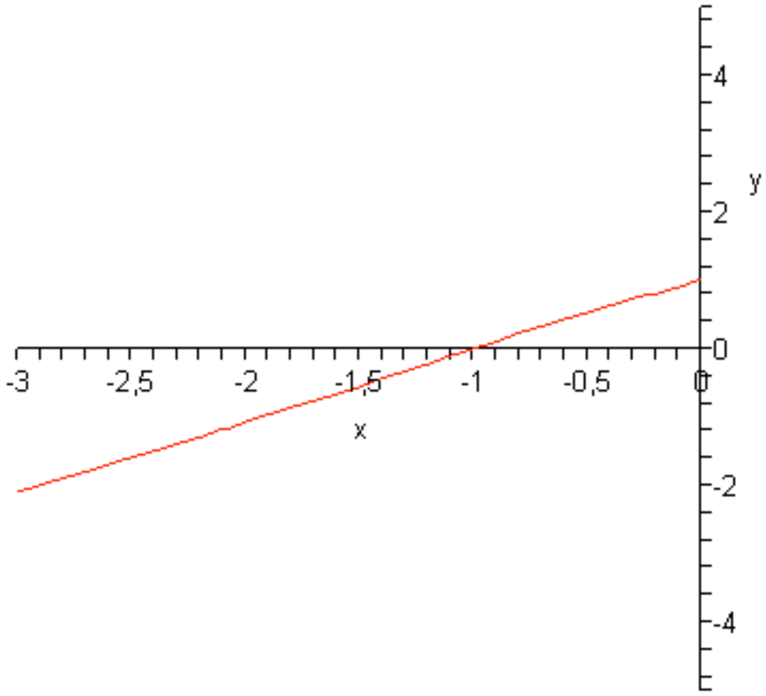
$$\left\{ x = \frac{1}{\mathrm{RootOf}\left(e^{-\_Z} + \_Z\,e^{\left(\frac{1}{\_Z}\right)} \right)},\, y = \mathrm{RootOf}\left(e^{-\_Z} + \_Z\,e^{\left(\frac{1}{\_Z}\right)} \right) \right\}$$

> g:=exp(x)+x*exp(1/x);

$$g := e^x + x\,e^{\left(\frac{1}{x}\right)}$$

> # g est strictement positive sur [0, +infinity[, d'où l'étude pour x<0 #

> plot(g,x=-3..0, y=-5..5);

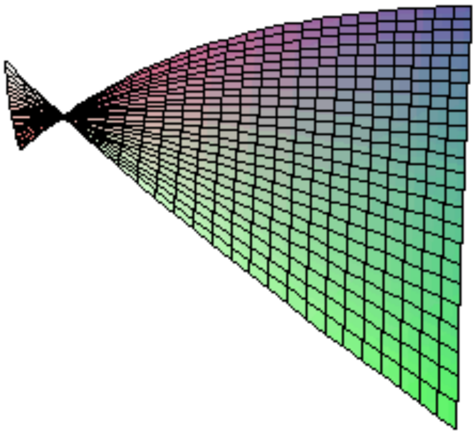


> # g' est positif, un seul point crtitique (-1,-1) #

> with(plots):

Warning, the name changecoords has been redefined

> plot3d(f,x=-1.5..0.5, y=-1.5..0.5);



> # On a un point col, il n'y a pas d'extremum #

> **# Exercice 15** Calcul d'intégrales #

> restart:

> f:=n->exp(-t)/t^(n+1)*(exp(t)-sum(t^p/(p!), p=0..n));

$$f := n \rightarrow \frac{e^{(-t)}\left(e^{t} - \left(\sum_{p=0}^{n} \frac{t^p}{p!}\right)\right)}{t^{(n+1)}}$$

> for n from 1 to 10 do int(f(n),t=0..+infinity) od;

$$1$$

$$\frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{18}$$

$$\frac{1}{96}$$

$$\frac{1}{600}$$

$$\frac{1}{4320}$$

$$\frac{1}{35280}$$

$$\frac{1}{322560}$$

$$\frac{1}{3265920}$$

$$\frac{1}{36288000}$$