

205 M a) Montrer que $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(tx)}{t(1+t^2)} dt$ est définie sur \mathbb{R}_+

b) Montrer que F est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+ , calculer $F'(x)$ en déduire $F(x)$

206 M Calculer, pour tout réel x $\int_0^{\pi/2} \frac{\arctan(x \sin t)}{\sin t} dt$

207 M Soit f l'application de \mathbb{R}_+ dans \mathbb{R} , définie par $f(x) = \int_0^1 \frac{dt}{(1+t+t^2)^x}$

Donner la limite puis un équivalent de $f(x)$ quand $x \mapsto +\infty$

208 M Donner le domaine de définition de $f : x \mapsto \int_1^{+\infty} \frac{(\ln t)^x}{(1-t)\sqrt{t}} dt$ Etudier la continuité de f

209 M On pose $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\exp(-xt)}{1+t^2} dt$ et $g : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t+x} dt$

a) Montrer que f et g sont définies sur \mathbb{R}_+

b) Montrer que f et g sont de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}_+^* et solutions de l'équation différentielle $y'' + y = 1/x$

c) Montrer que f et g sont continue en 0

d) En déduire que $g(0) = \pi/2$ et que $\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad f(x) = g(x)$

210 M Soit $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^x \sqrt{1+t^2}}$ Déterminer le domaine de définition de F et étudier cette fonction aux bornes de l'intervalle de définition.

211 M Soit $F : x \mapsto \int_0^1 \frac{(t-1)t^x}{\ln t} dt$

a) Montrer que F est définie et de classe \mathcal{C}^1 sur $] -1, +\infty[$

b) Pour tout $x \in] -1, +\infty[$ calculer $F'(x)$ et $F(x)$

212 M Soit $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\exp(-t)}{t+x^2} dt$

a) Montrer que F est définie, de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}_+^*

b) F est-elle intégrable en 0 ? F est-elle intégrable en $+\infty$?

213 E Soit $f : x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(itx) \exp(-t^2) dt$

a) Montrer que f est définie et de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}

b) Montrer que f est solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre

c) On donne $f(0) = \sqrt{\pi}$ exprimer $f(x)$ en fonction de x

214 EIVP a) Calculer, pour $x > 1$ $\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{x + \cos \theta}$

b) A l'aide du théorème de dérivation sous le signe intégral, calculer $\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{(x + \cos \theta)^2}$

215 EIVP On note, pour $x \in \mathbb{R}_+$ $G(x) = \int_0^1 \frac{\exp(-x^2 - t^2 x^2)}{1+t^2} dt$ et $F(x) = \int_0^x \exp(-t^2) dt$

a) Montrer que G est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+ et exprimer $G(x)$ en fonction de $F(x)$

b) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x)$, en déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} \exp(-t^2) dt$

216 ENSIE a) Montrer que $f : x \mapsto \int_x^{+\infty} \frac{\exp(-t)}{t} dt$ est définie sur \mathbb{R}_+^* et que $f(x) \sim -\ln(x)$ pour $x \mapsto 0^+$ et vérifier que $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad 0 \leq f(x) \leq \frac{\exp(-x)}{x}$

b) Soit $J :] -\infty, 1[\mapsto \mathbb{R} \quad y \mapsto J(y) = \int_0^{+\infty} f(x) \exp(xy) dx$

Montrer que J est définie, de classe \mathcal{C}^1 sur $] -\infty, 1[$

c) Trouver une équation différentielle du premier ordre vérifiée par J , en déduire $J(y)$