

## Intégrales à paramètre

- 195 a) Montrer que  $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\exp(-t) - \exp(-xt)}{t} dt$  est définie et de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}_+^*$   
 b) Pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$  calculer  $F'(x)$  et vérifier que  $F(x) = \ln(x)$

196 On note  $F$  l'application de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ :  $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(x^2 + t^2)}{1 + t^2} dt$

- a) Montrer que  $F$  est définie et de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$   
 b) Pour tout réel  $x$  calculer  $F'(x)$  en déduire  $F(x)$

197 Soit  $F$  l'application de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ , définie par  $F(x) = \int_0^{\pi/2} \exp(-x \cos t) \cos(x \sin t) dt$

- a) Montrer que  $F$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  et que  $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad F'(x) = -\frac{\sin x}{x}$

b) En déduire la valeur de  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$

198 Montrer, pour tout réel  $x$   $\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(xt)}{t^2} \exp(-t) dt = x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1 + x^2)$

199 Soit  $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\exp(-t)}{x^2 + t} dt$

- a) Montrer que  $F$  est bien définie, de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}_+^*$   
 b) Dresser le tableau de variation de  $F$  sur  $]0, +\infty[$   
 c) Montrer que  $F(x) \sim \frac{1}{x^2}$  quand  $x \mapsto +\infty$

200 Soit  $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(xt)}{1 + t^2} dt$

- a) Montrer que  $F$  est définie et continue sur  $\mathbb{R}$   
 b) Montrer que  $F$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^*$ , cette application est-elle de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$  ?

201 Soit  $F$  la fonction de la variable réelle  $x$  définie par  $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\exp(-t)}{(1 + \exp(-t))^x} dt$

- a) Donner le domaine de définition  $\mathcal{D}$  de  $F$   
 b)  $F$  est-elle de classe  $C^1$  sur  $\mathcal{D}$  ?  
 c) Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$  et trouver un équivalent de  $F(x)$  quand  $x \mapsto +\infty$

202 Soit  $F$  la fonction de la variable réelle  $x$   $F(x) = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t)(1+xt)}}$

- a) Trouver le domaine de définition  $\mathcal{D}$  de  $F$   
 b) Dresser le tableau de variation de  $F$   
 c) Exprimer  $F(x)$  à l'aide des fonctions usuelles, on pourra faire le changement de variable  $u = \sqrt{\frac{1+xt}{1-t}}$

203 On note  $F$  l'application de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ :  $F(x) = \int_0^{+\infty} \exp(-t - ixt) \times \frac{dt}{\sqrt{t}}$

- a) Montrer que  $F$  est définie et de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$   
 b) Trouver une équation différentielle du premier ordre vérifiée par  $F$

c) On suppose connu:  $\int_0^{+\infty} \exp(-t^2) dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ , calculer, pour tout réel  $x$   $F(x)$

204 Pour tout réel  $x$  on note  $\delta(x) = \min\{x - E(x), E(x) + 1 - x\}$   
 où  $E(x)$  est la partie entière de  $x$

On note  $F$  l'application de  $\mathbb{R}_+^*$  définie par  $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\delta(t)}{t(t+x)} dt$

- a) Montrer que  $F$  est bien définie et de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}_+^*$   
 b) Donner un équivalent simple de  $F(x)$  quand  $x \mapsto 0^+$